XIV Conferencia Latinoamericana de Informática
17avas. Jornadas Argentinas de Informática
e Investigación Operativa.
Buenos Aires, Setiembre 1988.

UNA GENERALIZACION AL PROBLEMA DEL VIAJANTE GTSP

Kesner Delia

Yankelevich Daniel

ESLAI - Escuela Superior Latinoamericana de Informática - cc 3193 (1000) -
Buenos Aires - Argentina

RESUMEN

Se plantea una generalizacion al problema del viajante (GTSP), analizando su complejidad. Se proponen distintas soluciones aproximadas haciendo uso de la heuristica de Christofides, la estrategia Greedy, una extension al Tree-Algorithm y el metodo de Local Search.

RESUMEN

Se plantea una generalizacion al problema del viajante (GTSP), analizando su complejidad. Se proponen distintas soluciones aproximadas haciendo uso de la heuristica de Christofides, la estrategia Greedy, una extension al Tree-Algorithm y el metodo de Local Search.

1 - INTRODUCCION

Los problemas combinatorios pueden ser resueltos de una manera bastante sencilla con algoritmos exponenciales. En la practica, la mayoria de esos algoritmos tardarian miles o millones de años en hallar la solucion optima, aun en las computadoras mas poderosas.

Seria ideal encontrar algoritmos mas veloces que resuelvan esos mismos problemas, pero en muchos casos se sospecha que dichos algoritmos no existen. Es por eso, que se intenta encontrar algoritmos que obtengan soluciones aproximadas que no disten demasiado de la optima. Para esto existen diversos metodos y tecnicas.

En este trabajo, se presenta una generalizacion al problema del viajante (GTSP), que posee las caracteristicas mencionadas.

En el capitulo 2 se plantea el problema y se propone un modelo utilizando grafos. En el tercer capitulo se introducen algunos conceptos sobre complejidad y se estudia en particular la del GTSP. El siguiente capitulo muestra el algoritmo exponencial que resuelve el problema. En el capitulo 5 se presentan los tres algoritmos polinomicos desarrollados para hallar soluciones aproximadas al GTSP. Finalmente, se introduce la tecnica de local search, aplicandola al GTSP, exponiendo ademas algunos resultados teoricos obtenidos.

2 - EL GTSP

2.1 - PLANTEO DEL PROBLEMA

Una empresa debe vender sus productos en las K ciudades mas importantes del pais, y dispone para ello de N viajantes que viven en algunas de estas ciudades. No hay dos viajantes que viven en la misma ciudad. A cada uno de ellos se le asigna la cantidad de ciudades a recorrer, sin determinar cuales seran estas. Se desea vender el producto en todas las ciudades, pero un viajante no podra pasar por una ciudad recorrida anteriormente por otro viajante o por el mismo.

Se quiere determinar cuales seran las ciudades que visitara cada viajante, de tal manera que la suma de las distancias recorridas por todos los empleados de la empresa sea minima.

2.2 - MODELO

En principio el modelo mas natural del problema es un grafo simple no dirigido [Har 69], donde los nodos representan ciudades y los arcos las posibles rutas. Es posible acceder desde una ciudad a cualquier otra, por lo que el grafo sera completo.

Cada arco tiene ademas asociado un costo, que representa la distancia de una ciudad a otra. Notar que la distancia de la ciudad A a la B es la misma que de B a A.

Al viajante i se le asigna un numero K_i de ciudades a recorrer.

Resolver el GTSP es dar a cada viajante el conjunto de ciudades a recorrer y la forma de hacerlo.

Notacion:

G=(V,E) grafo completo con #V=K
A en $R^{K X K}$ tal que $A_{i,i} = A_{j,j}$ y $A_{i,j}$ = infinito, para todo i = 1..K (matriz de costos)
V' incluido en V y #V' = N (ciudades donde viven los viajantes)

los nodos de V' estan numerados de 1 a N
sumatoria $K_i = K$; $K_i >= 1$ para todo i=1..N

Una solucion sera una **particion** de V, P_1.....P_N, cada P_i asociado a un A_i tal que:

i) A_i incluido en E para todo i
ii) $A_i \cap A_j = \{\} \dashrightarrow i=j$
iii) $\#P_i = K_i$
iv) Para todo e=(v_1, v_2) perteneciente a A_i ; v_1 , v_2 pertenecen a P_i y existen unicos u_1 , u_2 en P_i ($u_1 <> v_2$, $u_2 <> v_1$),tales que (u_1 , v_1) y (v_2 , u_2) pertenezcan a A_i .

Tal vez resulte contraintuitivo que la diagonal de la matriz de costos contenga infinito, pero es la forma en la que se indica que un arco no puede utilizarse, ademas este planteo es util para algunas de las soluciones que se presentan.

Se podria pensar que el problema se reduce a buscar el camino hamiltoniano de costo minimo de longitud K_1, luego el de longitud K_2 en el grafo resultante de G menos los nodos del primer ciclo, y asi sucesivamente, es decir, a resolver N veces el problema del viajante.

Lamentablemente hay contraejemplos, es decir grafos en los cuales el algoritmo insinuado no da la solucion optima.

3 - COMPLEJIDAD

3.1 - ALGUNOS CONCEPTOS SOBRE COMPLEJIDAD

La clasificacion de los problemas se ha deducido de las actuales conjeturas sobre la existencia o inexistencia de algoritmos polinomicos para resolverlos. Los problemas "demostrablemente irresolubles" son aquellos para los que no puede haber ningun tipo de algoritmos, los "demostrablemente dificiles" solamente tienen algoritmos de tiempo exponencial.

Los problemas para los que se conocen algoritmos de tiempo polinomico se asignan a la clase P. El caracter de los demas problemas es menos seguro solamente se conocen algoritmos suyos de tiempo exponencial, pero no esta demostrada la inexsistencia de algoritmos polinomicos.

Estos ultimos problemas se asignan a las clases NP y co_NP. Los problemas de la clase NP se podrian resolver con suerte en tiempo polinomico por tanteo. La clase co_NP contiene todos los problemas cuya solucion es la disyuntiva "si" o "no", y cuyas versiones complementarias "no" o "si" pertenecen a la clase NP. La clase NP_completa es un subconjunto de la clase NP compuesta por los problemas que tienen la siguiente propiedad: si uno de ellos pudiera resolverse mediante un algoritmo de tiempo polinomico, entonces todos los demas problemas de la clase NP podrian resolverse en tiempo polinomico. El descubrimiento de un tal algoritmo seria demostracion de que las clases P y NP son identicas.

Para que un problema forme parte de la clase NP no es preciso que exista un metodo eficiente de responder las preguntas afirmativa o negativamente. Lo que se quiere es que cuando la respuesta sea afirmativa exista un metodo breve y convincente que asi lo demuestre.

Al parecer todos los especialistas en ciencias de la computacion estan de acuerdo actualmente en que los algoritmos cuyo tiempo de ejecucion crece exponencialmente en funcion del tamaño de la entrada carecen de valor practico. Otro punto a tener en cuenta es que la rapidez de un algoritmo es propiedad intrinseca del mismo, y es independiente de la maquina que lo ejecute **[LePa 78]**.

Puede parecer grotesco definir un metodo matematico en terminos de felices ideas y tanteos afortunados, pero no obstante,es un metodo perfectamente legitimo de precisar cuales son los problemas que pertenecen a la clase NP. En teoria se podria incluso mecanizar el procedimiento construyendo un artificio denominado "maquina de Turing no deterministica" Este dispositivo puede efectuar todas las funciones de una maquina de Turing deterministica, pero ademas en algunos puntos, puede elegir de mas de una manera cual va a ser la etapa siguiente. La clase NP de los problemas nodeterministicamente polinomicos esta formada precisamente por aquellos problemas cuyos casos particulares de solucion afirmativa podrian ser identificados por maquinas efectuando una sucesion relativamente breve de computos por tanteo. Se considera que si la maquina no "adivino" correctamente, el tiempo invertido hasta ese momento no se toma en cuenta, y se vuelve hacia el punto de partida olvidandose de lo ocurrido. Esto tambien se podria explicar en los siguientes terminos: cada vez que se llega a una solucion no satisfactoria, se hace backtracking y se resta al tiempo de ejecucion total aquel que fue ocupado en el camino hacia dicha solucion.

La frase "algoritmo nodeterministico" fue propuesta por Floyd en 1967. En estos algoritmos Floyd alude al uso de la funcion "choice" para simplificar la descripcion exhaustiva en estrategias de busqueda. En el año 1970 Fikes describe un sistema completo de resolucion de problemas en el cual estos son especificados en un lenguaje procedural que permite el uso de las funciones choice nodeterministicas. Para que ello sea posible tambien se introdujeron los conceptos de "succes" y "failure", donde "succes" hace exitoso al algoritmo y "failure" indica un fracaso. De esta manera, un algoritmo nodeterministico puede pensarse como un algoritmo que realiza copias de si mismo al hacer un choice y una copia "muere" si ejecuta un failure, es decir, si falla **[Nil 71]**.

Se dice que un problema pertenece a la clase NP_HARD si tiene la siguiente propiedad : no se sabe de su pertenencia a la clase NP, pero si fuera NP seria NP_completo. Esto quiere decir que es por lo menos tan complicado como un problema NP_completo.

3.2 - ALGUNOS CONCEPTOS SOBRE OPTIMIZACION

DEFINICION 1:

Un problema de optimizacion es un conjunto M de instancias.Cada instancia es un par (F,c) ,donde F es un conjunto de soluciones factibles y c es una funcion de costo , c : F------> R.

DEFINICION 2:

Un problema de optimizacion combinatorio (POC) es una problema de optimizacion tal que para toda instancia (F, c) , F es finito.

De ahora en adelante se asume que F y c son dadas implicitamente en terminos de dos algoritmos A_f y A_c , ya que la cantidad de soluciones factibles puede ser muy grande.

El algoritmo A_f , dado un objeto combinatorial f y un conjunto S de parametros,decide cuando f es un elemento del conjunto F (el conjunto de soluciones factibles especificado por los parametros dados).

El algoritmo A_c , dada una solucion factible f y otro conjunto de parametros Q, devuelve el valor de c(f).

Una instancia de un POC puede ser definido entonces como la representacion de los parametros S y Q.

Ejemplo:

Una instancia del problema del viajante con N ciudades tiene como parametro S al entero N, y como parametro Q a la matriz simetrica de distancias entre las distintas ciudades. El algoritmo A_f, dado un objeto f y el parametro N, examinara cuando f es un tour de N ciudades. El algoritmo A_c, dado un tour f y la matriz simetrica de distancias, calcula el costo c(f) sumando todas las distancias atravesadas por el tour.

DEFINICION 3:

La version de optimizacion de un POC es aquella que dados parametros S y Q para los algoritmos A_f y A_c, encuentra la solucion optima factible.

DEFINICION 4:

La version de evaluacion de un POC es aquella que dados S y Q, encuentra el costo de la solucion optima.

Bajo la hipotesis que A_c es un algoritmo de tiempo polinomico (el costo c no es dificil de computar), la version de evaluacion no puede ser mas dificil que la version de optimizacion, pues dada la solucion optima, hallar su costo solo lleva tiempo polinomico.

DEFINICION 5:

La version de reconocimiento de un POC es aquella que dados S,Q y un entero L responde a la pregunta Existe una solucion factible f en F tal que c(f)<=L?

La version de reconocimiento es una pregunta que puede ser respondida por **SI** o por **NO**. Responder esta pregunta no es mas dificil que resolver la version de evaluacion, pues una vez resuelta esta, solo se debe comparar el costo optimo c(f') con L y responder **SI** si c(f')<=L.

Por lo tanto cada una de las versiones de optimizacion, evaluacion y reconocimiento (en ese orden) no es mas dificil que las anteriores asumiendo que c es computable en tiempo polinomico.

Cabe la pregunta: Son las tres versiones de la misma complejidad?. Bajo la hipotesis de que el costo de una solucion optima es un entero cuyo logaritmo esta acotado por un polinomio en el tamaño de la entrada, se puede mostrar que la version de evaluacion puede ser resuelta eficientemente cuando se resuelve la version de reconocimiento. Para mostrar esto debemos evaluar el costo optimo c(f') formulando la pregunta Es c(g')<=L? para varios valores de L. Esto puede ser hecho mediante busqueda binaria y mediante la hipotesis que log(c(f')) esta acotado por un polinomio en el tamaño de la entrada, podemos hacer eficiente uso del algoritmo que resuelve la version de reconocimiento para resolver la version de evaluacion.

No hay un metodo general para resolver la version de optimizacion haciendo un uso eficiente del algoritmo para la version de evaluacion, pero para algunos problemas esto se pudo hacer.

3.3 - COMPLEJIDAD DEL TSP

El GTSP es una generalizacion del problema del viajante (TSP), en el sentido que esta planteado para N viajantes y si N=1 es justamente el TSP. Por lo tanto como el problema del viajante es NP_completo [Lepa 81], el GTSP es por lo menos NP_completo.

Intuitivamente la complejidad del GTSP aparece por dos lados:

1) Hallar la particion optima que cumpla las restricciones. Cada conjunto de la particion representara las ciudades que debe visitar cada viajante.

2) Hallar dentro de cada conjunto de la particion, un camino hamiltoniano de costo minimo; el camino que cada viajante debera recorrer.

TEOREMA 1:

Las versiones de evaluacion y de reconocimiento del GTSP son NP_COMPLETAS, la de optimizacion es NP_HARD.

Demostracion:

La version de evaluacion se puede formular del siguiente modo: Dados N nodos de un grafo de K nodos, y numeros $K_i > 0$, con la suma de los $K_i = K$, se quiere hallar una particion de los K nodos en N subconjuntos, tal que cada subconjunto contenga uno y solo uno de los N nodos, y tal que cada subconjunto contenga K_i nodos. Llamemos a esta condicion que ponemos a la particion condicion Cond_part.

El siguiente algoritmo nodeterministico resuelve el problema en tiempo polinomico. Este algoritmo falla si en el grafo dado no es posible hallar la particion que cumpla las condiciones o si no hay ninguna solucion de costo menor o igual que L, y tiene exito si existe una solucion de costo menor o igual a L.

```
Procedure VIAJANTE GENERALIZADO( G=(V,E):GRAFO, L:ENTERO);

var

  { V es el conjunto de los nodos del grafo }
  conj, aux_conj:conjunto de conjuntos de nodos;
  aux_V,vert:nodo;
  bool:boolean;
  costo:ENTERO;

begin
  aux_V:=choice(V);
  V:=V-aux;
  conj:={aux};
  while V <> {} do
  begin
    vert:=choice(V);
    bool:=choice({true,false});
    if bool then
          begin
            conj:=conj U {vert};
          end
          else
          begin
            aux_conj:=choice(conj);
            conj:=conj-aux_conj;
            aux_conj:=aux_conj U {vert};
            conj:=conj U aux_conj;
          end;
    V:=V-vert;
  end;

  {se obtuvo una particion del conjunto de nodos del grafo, en conj}

  if Cond_part then
          begin
            costo:=0;
            while conj <> {} do
            begin
              aux_conj:= choice(conj);
              costo:= costo + EVAL_TSP(SUBGRAFO_EXPANDIDO(aux_conj));
              conj:= conj-aux_conj;
            end;
          end;
          else failure;

  if costo <= L then succes
          else failure
end;
```

Es sencillo observar que este algoritmo es polinomico. La primer parte, que halla la particion, ejecuta K ciclos, ya que en cada ciclo retira un nodo del conjunto de vertices y termina cuando el conjunto esta vacio

La segunda parte es del orden de la cantidad de conjuntos de la particion, este numero es igual al numero de viajantes que esta acotado por la cantidad de nodos del grafo, es decir por K, y, para cada conjunto, se realiza la llamada a *EVAL_TSP* que es polinomico. Luego, el algoritmo es polinomico.

EVAL_TSP es un algoritmo que dado un grafo (en este caso el subgrafo expandido del conjunto de nodos pasados como parametros) devuelve el costo de la solucion optima. Este algoritmo es polinomico, ya que el problema del viajante pertenece a NP (polinomico no deterministico).

Como el problema del viajante es un caso particular de este, y el problema del viajante es NP_COMPLETO este problema es por lo tanto NP_COMPLETO (en la version de reconocimiento).

Por lo argumentado mas arriba, dado que la version de reconocimiento del GTSP es NP, tambien lo es en su version de evaluacion. La idea es la misma, y pese a no ser una prueba formal lo expuesto es suficiente para decir que el GTSP es entonces NP_COMPLETO, aun en su version de evaluacion. Es sencillo hallar un algoritmo polinomico que dada una solucion calcule su costo.

Para completar la demostracion, por lo ya señalado, es conveniente ademas pedir las siguientes condiciones:

1) Los costos de las soluciones factibles al problema tienen una cota superior. Esta cota debe ser una funcion polinomica de la entrada del problema, en nuestro ejemplo, el numero de nodos. Esto es posible teniendo, por ejemplo, una cota al costo de un arco. Si esta cota es H se puede acotar el costo de la solucion por :

$$H * \text{suma}_{i=1}^{N} K_i$$

Este numero a su vez es menor que $H * N^2$, ya que el numero de viajantes es menor que la cantidad de nodos del grafo ($\#V' < \#V$).

2) Los costos de las soluciones deben ser enteros. En realidad, alcanza con pedir que los costos sean discretizables, en la practica esto siempre sucede, ya que jamas se trabaja con un numero no acotado de decimales. Por lo tanto, siempre podemos pensar a los costos como enteros.

La version de optimizacion es NP_HARD, ya que trivialmente, si fuera NP seria NP_COMPLETO, por ser el viajante un caso particular de ella.

4 - SOLUCION EXPONENCIAL AL GTSP

Como en todo POC existe una solucion trivial, y consiste simplemente en explorar exhaustivamente todas las posibilidades.

Se hallan todas las particiones posibles del conjunto de ciudades tal que el cardinal de los conjuntos de la particion sean la cantidad de ciudades que debe recorrer cada viajante.

En cada una de estas particiones, y para cada uno de los conjuntos de ciudades de cada particion, se busca un camino hamiltoniano de costo minimo. Asi se obtiene para cada particion un costo que resultaria de sumar todos los costos de los caminos hamiltonianos minimos hallados.

Dado un algoritmo que halla particiones distintas de un conjunto de cardinal K **[NiWi 75]**, es muy facil agregar restricciones tales como :

-la particion debe contener N conjuntos.
-cada subconjunto i de la particion debe tener cardinal K_i - 1.

De las K ciudades ,solo interesan aquellas de las que no parte ningun viajante (estas son K- N). De ellas se debe ver todas las maneras de tomar K_1-1 ciudades para el primer viajante(ya que la ciudad de donde parte seguro la va a recorrer), K_2-1 para el segundo viajante ,y asi sucesivamente. Si llamamos C(t,r) al numero combinatorio 't tomados de a r', el numero de particiones que nos interesan son:

$$C(K-N, K1-1) * C(K- N.- (K_1-1), K_2 -1) * ..... * C(K_N -1, K_N -1)$$

este numero es precisamente

$$\frac{(K- N)!}{(K_1 -1)! * ..... * (K_N -1)!}$$

5 - SOLUCIONES NO OPTIMAS AL GTSP

5.1 - RAZONES PARA DISEÑAR ALGORITMOS POLINOMICOS

El GTSP dista mucho de ser solo un problema teorico. Este problema tiene un numero muy grande de aplicaciones, desde recorridos y viajes hasta tareas de scheduling, y quizas aun mas que las del viajante al ser mas general que aquel. Por este motivo es importante y necesario plantear algoritmos que aunque no den soluciones optimas, hallen algunas "buenas"

Dos tecnicas pueden ser usadas como modo de resolucion de problemas para los cuales no se conocen algoritmos polinomicos:

1-Un problema Q para el que no se conoce algoritmo polinomico es reemplazado por un problema Q' el cual tiene un algoritmo polinomico conocido que lo resuelve cuya solucion es aproximada a la de Q.

2-Un subconjunto relativamente pequeño de posibles soluciones de Q es examinado usando un criterio de seleccion razonable ,intuitivo y generalmente pobre. La 'mejor' de estas soluciones potenciales es tomada como solucion del problema Q.
[Ha 78].

5.2 - ALGORITMOS DE TIEMPO POLINOMICO PARA EL TSP

Para el TSP existen algoritmos que dan soluciones aproximadas en tiempo polinomico. Entre estos algoritmos se encuentran el GREEDY **[AHU 83]**, el TREE - ALGORITHM, y el de CHRISTOFIDES **[Pap 82]**.

DEFINICION 6:

Sea A un algoritmo de optimizacion con funcion de costo positiva C, sea A' otro algoritmo que da una solucion factible F' y sea F la solucion optima que da el algoritmo A. Diremos que A' es K-aproximado para A (K>=0) si y solo si

$$\frac{c(F')-c(F)}{c(F)} <= K$$

TEOREMA 2: El algoritmo TREE_ALGORITHM es 1-aproximado **[Pap 82]**.

TEOREMA 3: El algoritmo de Christofides es 1/2-aproximado **[Pap 82]**.

TEOREMA 4:

A menos que P = NP no hay algoritmos polinomicos e-aproximados para el problema del viajante para ningun e > 0.

Es necesario observar que en los algoritmos no optimos citados para el TSP, se supone que los grafos sobre los que se van a aplicar los algoritmos cumplen la desigualdad triangular, dicho de otra forma, que los costos de los arcos tienen las propiedades de la distancia euclidea. La desigualdad triangular puede plantearse como una restriccion a la matriz de costos A pidiendo que $A_{i\,j} + A_{j\,k} >= A_{i\,k}$ para cualquier tripla i, j, k. En algunos casos se pide la desigualdad estricta.

Este pedido, sin embargo, no se requiere para probar el algoritmo (es decir, para que funcione) sino para garantizar que la solucion sea "buena" en algun sentido. Se pide que sea k-aproximada (k finito), o por lo menos; en caso de no ser posible acotar la solucion en funcion del optimo, que en la mayoria de los casos de un resultado no muchas veces mayor que el optimo.

Sin la propiedad de la desigualdad triangular es posible hallar grafos para los cuales estos algoritmos encuentren una solucion de costo tan grande como se quiera. Intuitivamente, bastaria con darle a alguno de los arcos que el algoritmo elige en forma obligada (sin tener en cuenta su costo), un costo tan grande como se quiera.

Es interesante mencionar que en los casos en los que se cumple esta propiedad, valiendo ademas el mayor estricto, cosa que sucede siempre con las distancias euclideas, el circuito minimo resulta hamiltoniano, aunque no se lo exija.

Agregar otras restricciones, como por ejemplo limitar el grado de los nodos del grafo no resulta demasiado util:

TEOREMA 5:

El problema del circuito hamiltoniano es NP-COMPLETO aun si el grafo cumple la restriccion de tener nodos solo de grado cuatro o menor.

TEOREMA 6:

El problema del circuito hamiltoniano para grafos con todos los nodos de grado 3 es NP-COMPLETO .

[Pap 82]

Pese a ser restricciones muy fuertes que eliminarian la mayoria de las aplicaciones, no ayudan tanto como para que valga la pena adoptarlas.

5.4 - ALGORITMOS DE TIEMPO POLINOMICO PARA EL GTSP

La primer desicion tomada, es, entonces, restringirse a los grafos cuya matriz de costo respete la desigualdad triangular.

5.4.1 - PRIMERA SOLUCION

La primera de estas soluciones fue una generalizacion del algoritmo greedy para el TSP **[AHU 83]** que dio como resultado un algoritmo greedy para el GTSP. Este algoritmo tambien esta basado en los de Kruskal y Prim de busqueda de arboles expandidos de costo minimo **[AHU 83]**.

1-Crear para cada viajante una componente conexa que solo contenga a la ciudad donde el viva.
2-Ordenar los arcos del grafo de menor a mayor.
3-Mientras exista algun viajante i tal que su componente tenga menos de K_i vertices hacer:
  3.1-Elegir la arista L=(U,V) tal que:
    - U y V no esten en la misma componente, ni en distintas (sin perdida de generalidad U esta en una componente y V no)
    -Sea de costo minimo
    - No pertenezca a ninguna componente
    - grado(U) <2 en el arbol expandido
    -La componente a la cual pertenece U aun admita vertices
  3.2-Agregar V a dicha componente
  3.3-Agregar L a dicha componente
4-Agregar el arco que forme un ciclo en cada una de las componentes. Notar que este queda univocamente determinado.

5.4.2 - SEGUNDA SOLUCION

La idea consiste en hallar una particion prometedora de alguna manera, y luego para cada elemento de la particion aplicar el TREE ALGORITHM.

1-Ordenar los arcos del grafo de menor a mayor.
2-Colocar a cada nodo de V' en una nueva componente.
3-Ir agregando los arcos a las componentes hasta que todas tengan la cantidad de nodos deseada, es decir hasta que cada una tenga cardinal K_i, usar las siguientes restricciones:

3.1-Si el arco une dos componentes distintas o
3.2-Si el arco une dos nodos de una misma componente y forma ciclo dentro de esta o
3.3-Si el arco incorpora a la componenete un nodo y entonces el cardinal de esa componente supera el numero deseado (K_i), no se agrega el arco
3.4-cualquier otro caso, se agrega el y se lo quita del conjunto de arcos a revisar

(se obtuvo una particion del conjunto de vertices del grafo,
y para cada conjunto de la particion se obtuvo un arbol expandido T
de costo minimo)

4-para cada conjunto de la particion hallada hacer:
4.1-crear un multigrafo G donde por cada arco e=(x1,x2) de T crear los arcos e'=(x1,x2) e"=(x2,x1).
4.2-encontrar un camino euleriano de G.
4.3-encontrar un tour en dicho camino euleriano.

5.4.3 - TERCERA SOLUCION

Aqui la idea tambien consiste en hallar una particion prometedora, pero luego para cada elemento de la particion aplicamos el algoritmo de Christofides. Los puntos 1, 2 y 3 son los mismos que antes.

1- 2- 3

(se obtuvo una particion del conjunto de vertices del grafo,
y para cada conjunto de la particion se obtuvo un arbol expandido T
de costo minimo)

4-para cada conjunto de la particion hallada hacer:
4.1-sea T'=los vertices de T que tengan grafo impar.
4.2-encontrar el minimo matching completo M en el grafo completo compuesto solamente por los vertices T'.
4.3-sea G el multigrafo con vertices={1,2,...,n} y arcos=arcos de T y arcos de M.Notar que los vertices de G son los mismos que los del grafo original.
4.4-encontrar un camino euleriano en G.
4.5-encontrar en dicho camino euleriano un tour.

5.4.4 - TIEMPO DE EJECUCION

La tres soluciones son de orden $O(K^3)$.
El tree algorithm es de orden $O(K^2)$ y el de Christofides es de $O(K^3)$ **[Pap 82]**.
La cantidad de arcos en un grafo completo de K nodos es $K * (K - 1) / 2 = a$.
Usando estos resultados se hallan los ordenes de cada paso de cada uno de los algoritmos presentados.

primera solucion:
1- O(N), ya que hay N viajantes
2- $O(2\ a \log a) = O(a * \log a)$, es el tiempo necesario para ordenar una lista de a elementos.
3 - El cuerpo del Mientras es de orden O(a), ya que cada vez se busca secuencialmente en la lista. En el peor caso, se debera recorrer toda la lista de a elementos. Este cuerpo se ejecuta K veces, ya que cada vez se agrega un arco y se termina cuando en ninguna componente se pueden agregar mas arcos, esto es, sumatoria (K_i) veces y sumatoria $(K_i) = K$. Por lo tanto el orden es $O(K * a)$.
4 - O(N), ya que hay N componentes.

El orden de este primer algoritmo es entonces $O(\text{maximo}(a * \log a, K * a)) = O(\text{maximo}(K^2 * \log K^2, K^3) = O(K^3)$.

segunda y tercera solucion:

1 - O(a * log a)
2 - O(N).
3 - O(K * a), por lo mismo que en el punto 3 del algoritmo anterior.

Para cada elemento de la particion se aplica alguno de los dos algoritmos propuestos, por lo tanto si un elemento de la particion tiene K_i vertices y el orden del TREE ALGORITHM o del algoritmo de CHRISTOFIDES es $O(K_i)$, el orden total es la suma de los ordenes $O(K_i)$.

En la segunda solucion el orden total es entonces $O(\text{maximo}(K^3, \text{sumatoria } K_i^2) = O(K^3)$, ya que $K_i < K$ y $N < K$.

En la tercera solucion el orden total resulta $O(\text{maximo}(K^3, \text{sumatoria } K_i^3) = O(K^3)$, ya que los K_i son enteros positivos y por lo tanto la sumatoria $K_i^3 <= K^3$.

6 - LOCAL SEARCH

Local Search es un metodo que sirve para hallar soluciones aproximadas a problemas de optimizacion. Consiste en hallar una solucion inicial y a partir de ella buscar soluciones cercanas (en algun sentido) que permitan mejorarla. Al conjunto de soluciones cercanas a una solucion dada se lo llamara vecindad.

La intencion de definir optimos locales en la vecindad de una solucion es buscar entre las cercanas a ella la mejor.

Una posibilidad es definir la vecindad de una solucion como todas las soluciones posibles. La opuesta es definirla como el conjunto formado por ella misma. Entre estos dos extremos pueden elegirse muchisimas vecindades, estas deben ser sencillas de explorar pero no demasiado pequeñas, de manera que el optimo local sea lo bastante bueno.

Puede ser conveniente elegir una vecindad pequeña, aun a riesgo de revisar varias vecindades antes de hallar una solucion buena, o trabajar con vecindades grandes, pagando el costo de un mayor tiempo de busqueda.

Todos estos conceptos de LOCAL SEARCH se apoyan en la practica. Solo mediante experimentacion puede resolverse si una vecindad es mejor que otra o si una solucion inicial o conjunto de soluciones iniciales es mejor que otro.

6.1 - CONCEPTOS GENERALES

DEFINICION 7:

Un optimo global de una instancia (F,c) es un f perteneciente a F tal que $c(f) <= c(y)$ para todo y perteneciente a F.

Si (F_1, c_1) es una instancia del GTSP, F_1 es el conjunto de todos los ciclos que cumplen las restricciones para un grafo dado y la funcion c_1 de costo esta dada por la suma de los costos de los arcos de la solucion factible. El GTSP es el conjunto de todas las instancias correspondientes a grafos completos con funciones de costo simetricas que cumplen la desigualdad triangular.

DEFINICION 8:

Dado un problema de optimizacion Z con instancias (F_Z, c_Z) una vecindad es una funcion N: F_Z --> partes(F_Z) , definida para cada instancia.

DEFINICION 9.

Dada una instancia (F_Z, c_Z) de un problema de optimizacion Z y una vecindad N para dicha instancia, una solucion factible f de F_Z sera un optimo local con respecto a N si c(f) <= c(y) para todo y perteneciente a N(f).

Ejemplo:

Para el problema del TSP se define la vecindad 2-change como $N_2(f)$ = { g / g pertenece a F y g puede obtenerse de f removiendo dos arcos del ciclo y reemplazandolos por dos arcos }

Se podria generalizar esta idea para una vecindad R-change.

TEOREMA 7:

Para el TSP el optimo local de N_2 no es necesariamente el optimo global pero el optimo local de N_K (K numero de vertices) es el optimo global.

[Pap 82]

DEFINICION 10:

Una solucion local optima para el TSP en una vecindad R-change se llama R-opt.

Para hallar una solucion R-opt, se define la funcion MEJORAR:

MEJORAR(f) = si existe s perteneciente a $N_R(f)$ tal que c(s) < c(t) entonces s
sino 'no'

Un algoritmo para hallar un ciclo R-opt es entonces:

```
procedure R-opt (var t)
   t= alguna solucion inicial;
   while MEJORAR(t) <> 'no' do
      t= MEJORAR(t);
```

Este algoritmo busca el optimo en una vecindad.
El problema ahora es

a) encontrar una vecindad adecuada
b) dar una solucion inicial (o mas)

Por otro lado, se tiene la posibilidad de buscar pocos optimos locales en vecindades muy grandes, o buscar muchos en varias vecindades pequeñas.

Las vecindades R-change fueron estudiadas para el TSP, haciendo enfasis en N_2 y N_3 **[Bo 58, Cr 58, Li 65, HK 62]**, con las siguientes conclusiones empiricas:

a) Las vecindades 2-change y 3-change resultaron muy buenas y relativamente sencillas de utilizar.

b) La vecindad 4-change resulto mejor que la 3-change, pero las mejoras son tan pequenas que no conviene enfrentar el costo mayor de busqueda.

c) La vecindad 3-change resulta tan poderosa, que en la practica es casi lo mismo comenzar con una solucion 'buena' (aproximada) que con una hallada al azar. Esto es completamente contraintuitivo, en general se esperaria que empezando con soluciones buenas se consiguieran aproximaciones mejores.

d) La probabilidad (hallada empiricamente) de que una solucion 3-opt para un problema de 48 ciudades dado sea optimo global, es aproximadamente de 0.04. Luego, para 100 corridas, comenzando de soluciones 'al azar' la probabilidad de hallar el optimo global es de 0.99

e) La probabilidad (hallada empiricamente) de que una solucion 3-opt sea el optimo global es aproximadamente de $2^{-K/10}$.

Como conclusion de lo anterior, se ve que para el TSP es efectivo utilizar soluciones iniciales elegidas al azar, que 3-change es una vecindad buena y que muchas corridas ayudan mucho para encontrar una solucion aproximada. El exito obtenido con el TSP impulso a utilizar esta tecnica con otros problemas. Sin embargo, en otros problemas en los que se deben definir vecindades mas debiles, puede resultar conveniente comenzar con una solucion buena, tal vez hallada con un algoritmo de aproximacion. Lamentablemete, todos los resultados en este area no estan apoyados sobre una base teorica, por lo que toda hipotesis debe justificarse empiricamente.

El parecido entre el problema del viajante y el GTSP y la posibilidad de encontrar con relativa facilidad una buena solucion inicial con los algoritmos propuestos anteriormente, llevan a contemplar la posibilidad de utilizar este metodo para el GTSP.

6.2 - SOLUCIONES INICIALES AL GTSP

a-Para el problema del TSP es efectivo usar soluciones iniciales elegidas al azar **[Pap 82]**. Otra posibilidad seria entonces generar varias soluciones al azar para el GTSP y tomarlas como soluciones iniciales.

b-Una posibilidad es tomar como soluciones iniciales aquellas que se obtienen por los algoritmos no optimos ya propuestos. Esto daria tres soluciones iniciales (Greedy, tree algorithm y Christofides generalizado), o menos pues podrian coincidir algunas.

c-Otra posibilidad es generar las x primeras soluciones con el algoritmo exponencial. Pero las obtenidas en a seran en la mayoria de los casos mejores con respecto al costo.Por otro lado esta idea no da soluciones totalmente al azar, ni soluciones 'buenas', ni soluciones demasiado lejanas, por lo tanto esta tecnica no se tomara en cuenta.

5.3 - VECINDADES PARA EL GTSP

a-La primera propuesta es hallar la vecindad 2-change o 3-change para cada subconjunto de una particion.
El cardinal de 2-change es:

$$\#N_2(f) = \text{sumatoria}_{i=1}^{N} [K_i * (K_i - 3)] / 2$$

con $K_i >= 3$. Es importante que este numero sea polinomico con relacion al numero de nodos, ya que da una cota polinomica del tiempo que se requiere para realizar una busqueda en la vecindad.

Esto se debe a que elegido un arco ,no puedo elegir ninguno de los adyacentes a el (ni el mismo arco) pues el resultado de remover esos dos arcos y agregar otros dos (resultarian ser los mismos) daria el mismo grafo . La division por dos es porque a los efectos del problema resulta lo mismo elegir el arco (u,y) que el arco (y,u). Ademas se pide $K_i >=3$ porque sino el numero $[K_i * (K_i -3)] / 2$ seria negativo y no tendria sentido. Esto es porque remover dos arcos en un ciclo de dos o tres arcos obligaria a elegir dos arcos adyacentes y eso no puede pasar por lo dicho anteriormente.

b-Llamemos 1-part a la vecindad que se obtiene al aplicar una funcion N_{1p} tal que : $N_{1p}(f)=\{ g / g$ pertenece a F y g puede obtenerse de f intercambiando 2 nodos del grafo de manera tal que cada nodo pertenezca a un subconjunto de la particion distinto$\}$

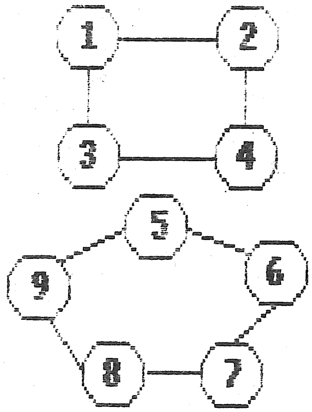
De igual manera se puede definir una vecindad m-part, obtenida a partir de una solucion factible aplicando la funcion N_{mp} tal que: $N_{mp}(f)=\{ g / g$ pertenece a F y g puede obtenerse de f intercambiando 2*m nodos del grafo de manera tal que m pertenezcan a un subconjunto de la particion, y los otros m nodos a otra distinta$\}$.
Para ello se pide que los dos subconjuntos tengan cardinal estrictamente mayor que m.

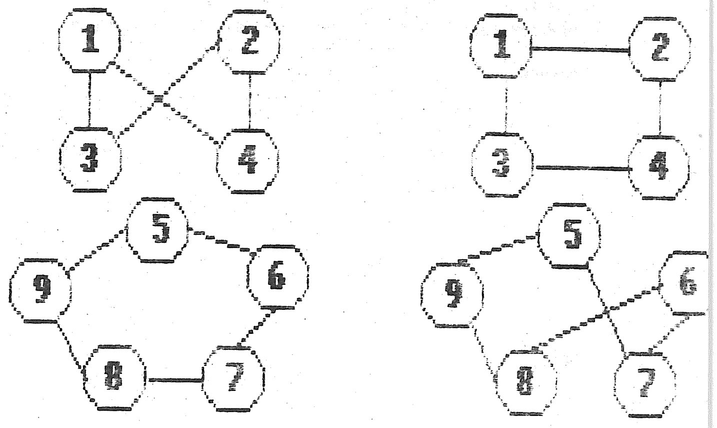
El cardinal de la vecindad 1-part esta dado por:

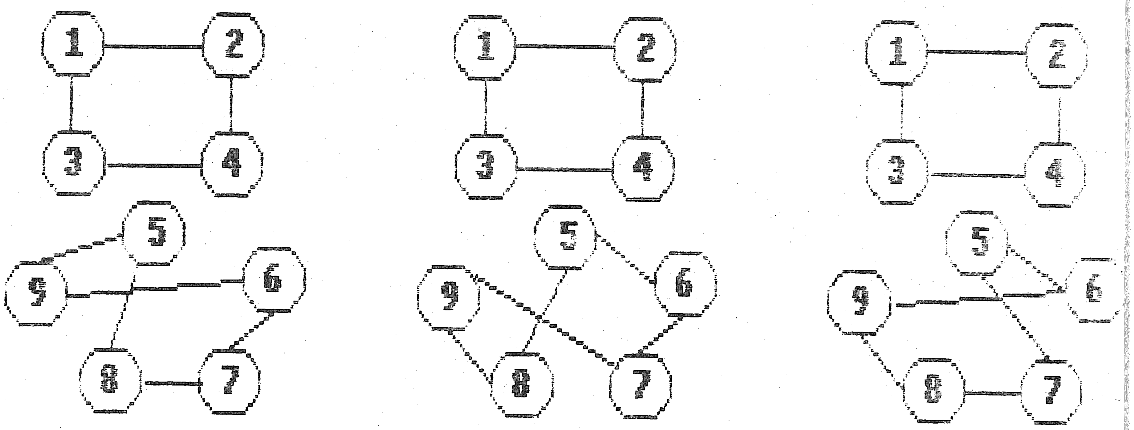
$$\#N_{1p}(f) = \frac{\text{sumatoria}_{i=1}^{N} [K_i * (K - K_i)]}{2}$$

Este numero se debe a que cada ciudad del grafo puede ser intercambiada con cualquiera que no este en su mismo subconjunto de la particion. Se divide por 2 para no contar arcos repetidos.

solucion inicial







Algunos de los vecinos N2 de la solucion inicial

Para formalizar el concepto de vecindad 1-part se introducen los siguientes conceptos:

DEFINICION 11:

Dada una particion uniforme (A,B) y elementos a en A y b en B, la operacion definida por:

A'=(A-{a}) U {b}
B'=(B-{b}) U {a} se llama swap.

Una particion uniforme (A,B) es tal que #A = #B
Consideremos el efecto que tiene el swap sobre el costo de la particion A,B.

DEFINICION 12:

Llamaremos costo externo asociado a un elemento a perteneciente a A.

$E(a) = \sum_{i \text{ en } B} d_{ai}$ (d_{ai} es el costo del arco (a,i))

Llamaremos costo interno asociado a un elemento a

$I(a) = \sum_{j \text{ en } A} d_{aj}$

D(a) sera la suma E(a) + I(a), el costo de un nodo.

LEMA 1:

Dada una solucion factible f, el swap de a y b resulta en una reduccion de costo de:

$g(a,b) = c(f) - D(a) - D(b) + d_{av_3} + d_{v_4a} + d_{bv_1} + d_{v_2b}$, donde (a,v_3), (v_4,a), (b,v_1) y (v_2,b) son los nuevos arcos incorporados.

DEFINICION 13:

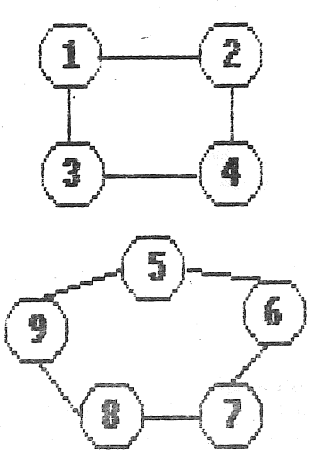
La VECINDAD SWAP (Ns) para un problema de particiones uniformes es Ns(a,b)={todas las particiones uniformes A',B' que pueden ser obtenidas de la particion uniforme A,B por un simple swap}

Se puede encontrar un swap favorable en $O(N^2)$, examinando g(a,b) para todo par a en A, b en B. Se puede investigar la vecindad definida por el intercambio de dos elementos de A con dos elementos de B en $O(N^4)$. Esta es la idea de N_{2p} : se podria formalizar del siguiente modo:

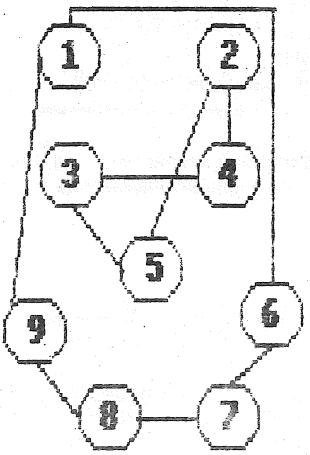
Dada una particion A1=A11 U A12, A2=A21 U A22, A3, ..., AN, un elemento de la vecindad N_{mp} seria:

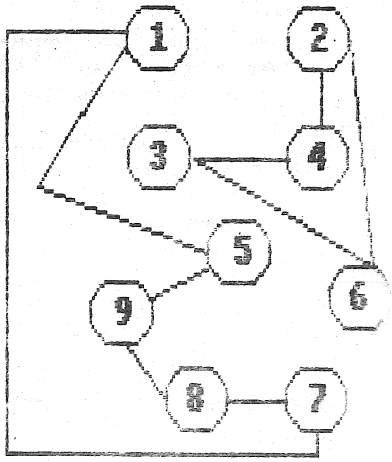
A1'=A11 U A22, A2'=A21 U A12, A3, ..., AN

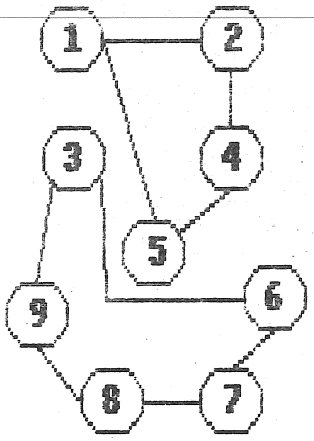
donde #A12=#A22=m

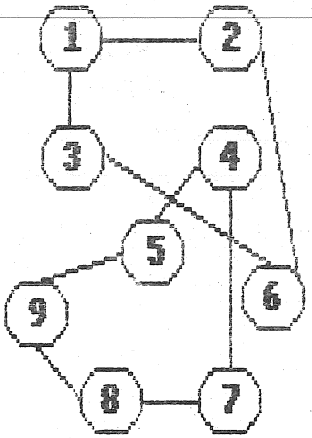


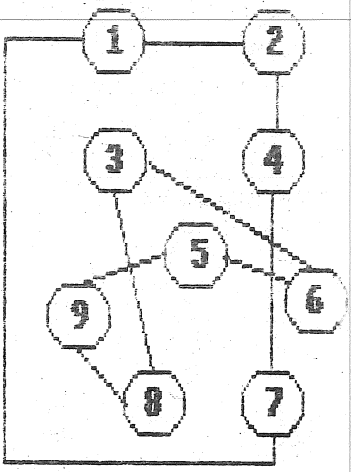
solucion inicial











Algunos de los vecinos Nip de la solucion inicial

La idea es reemplazar la busqueda de un swap favorable por una secuencia favorable de swaps, usando el costo de la instancia del problema. Así una secuencia favorable de k swaps es obtenida :

1-calcular D(v) para todos los elementos v en V=A U B.
2-buscar el par a_1',b_1' tal que $g_1 = g(a_1',b_1')$ sea lo mas chico posible.
3-intercambiar a1' y b1' y recalcular D.
4-repetir los pasos 2 y 3, obteniendo una secuencia de pares a_2', b_2'; ...; a_k', b_k'.
Una vez que un par fue elegido no se puede elegir nuevamente.

De esta forma se obtiene una secuencia $g_1, ..., g_k$ que corresponde a los pares elegidos y tal que el resultado de intercambiar el conjunto $X=\{a_1', ..., a_i'\}$ con $Y=\{b_1', ..., b_i'\}$ es

$$G(k)=\sum_{i=1}^{k} g_i$$

Cuando k = #A = #B se estan intercambiando todos los nodos de A con los de B por lo tanto G(k)=0. La idea es buscar k tal que G(k) sea minimo

En el GTSP de todos los subconjuntos de la particion solo se trabaja con dos y estos pueden tener cardinales diferentes f_1 y f_2; por lo tanto se pide $k<=f_1$, $k<=f_2$.

c-A partir de la idea sugerida en b se propone una vecindad con la funcion definida por el siguiente algoritmo:

1-Sea A la particion dada por la solucion factible. Se pide que A tenga al menos dos miembros (por lo menos dos viajantes).

2-Mientras haya mas de un miembro en A hacer

2.1-Elegir dos miembros A1 y A2 de A y aplicar N_2
2.2- A=A-(A1 U A2) ,volver a 2.

A lo sumo quedo un miembro de A igual que antes para cada elemento de la vecindad (ya que N puede ser impar)

e-La ultima posibilidad seria combinar todas estas ideas. Pero aqui tambien se presentan varias maneras posibles de hacerlo.
Una de ellas seria dada una solucion factible hallar la vecindad con la funcion definida en c,y para cada elemento de la vecindad aplicar la funcion N_2
Otra forma seria hallar la vecindad 1-part mediante la funcion N_{1p} y para cada elemento de la vecindad aplicar N_2 . Tambien se podria hallar primero 2-change y luego 1-part para cada elemento de 2-change. Este metodo podria generalizarse:

$N_2(N_{1p}(f))$ para R-change de m-part
$N_{1p}(N_2(f))$ para m-part de R-change

(admitiendo el abuso de notacion, pues N_2 y N_{1p} estan definidas de F en partes(F))

Es claro que la mejor opcion es una estrategia combinada. Este concepto intuitivo se justifica de la siguiente manera

TEOREMA 8:

$$\#N_2(N_{1p}(f)) = \#N_{1p}(N_2(f)) = \#N_{1p}(f) * \#N_2(f)$$

Sea f una solucion inicial, y sean g1= $\#N_{1p}(f)$, G1= $N_{1p}(f)$, g2= $\#N_2(f)$, G2=$N_2(f)$.
$(N_2\ N_{1p})(f)=(N_2(N_{1p}(f)))$; esto es aplicar la funcion N_{1p} a la solucion inicial f, y luego aplicar N2 a cada elemento del conjunto G1.

$$\#(N_2(N_{1p}(f)) = \text{suma}_{g \text{ en } N_{1p}(f)} \#N_2(g)$$

Pero como $\#N_{1p}(f)$= g1 para cualquier f, entonces $\#(N_2(N_{1p}(f)))$= g1*g2

$(N_{1p}\ N_2)(f)=(N_{1p}(N_2(f)))$; esto es aplicar la funcion N_2 a la solucion inicial f, y luego aplicar N_{1p} a cada elemento del conjunto G2.

$$\#(N_{1p}(N_2(f))) = \text{suma}_{g \text{ en } N_2(f)} \#N_{1p}(g)$$

Nuevamente como $\#N_2(f)$=g2 para cualquier f, entonces $\#(N_{1p}(N_2(f)))$=g2*g1.

TEOREMA 9:

R-change esta incluida en R-change de m-part (dualmente m-part esta incluida en m-part de R-change) y m-part esta incluida en R-change de m-part (dualmente R-change esta incluida en m-part de R-change).

La demostracion es trivial. Dada la funcion N_R y N_{mp} se quiere ver que $N_R(f)$ esta incluida en $N_R(N_{mp}(f))$. f pertenece a $N_R(f)$ y a $N_{mp}(f)$. Por otro lado, $N_R(N_{mp}(f))$ es un abuso de notacion que representa en realidad

$$N_R(N_{mp}(f)) = U\ \{\ N_R(g)\ /\ g \text{ pertenece a } N_{mp}(f)\ \}$$

En particular,como f pertenece a $N_{mp}(f)$, $N_R(f)$ esta incluido en la gran union luego $N_R(f)$ esta incluido en $N_R(N_{mp}(f))$.

Como h pertenece a $N_R(h)$., para cada g perteneciente a $N_{mp}(f)$, g pertenece a $N_R(g)$. Luego para todo g en $N_{mp}(f)$, g esta en la union definida mas arriba. Luego, $N_{mp}(f)$ esta incluido en $N_R(N_{mp}(f))$.

Dualmente se demuestra la segunda afirmacion.

Quedaria ahora por definir que estrategia combinada de las posibles elegimos.

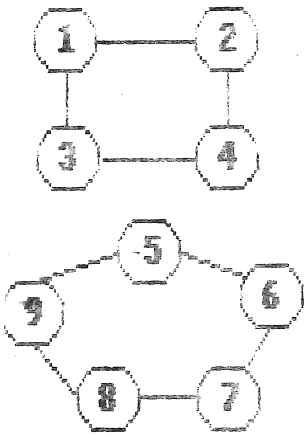
LEMA 2:

En la vecindad 2-change de una solucion factible f, dados los arcos (s_1,s_2) y (s_3,s_4) de un ciclo C de la solucion f, queda determinado un unico vecino de f sacando esos arcos; y los arcos que los substituyen son (s_2,s_4) y (s_1,s_3).

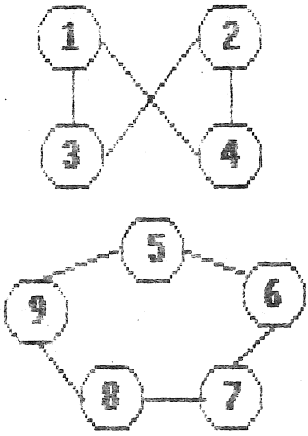
Este lema se observa graficamente. Deben verificarse por separado los casos (a) los arcos son adyacentes y (b) los arcos no son adyacentes.

TEOREMA 10:

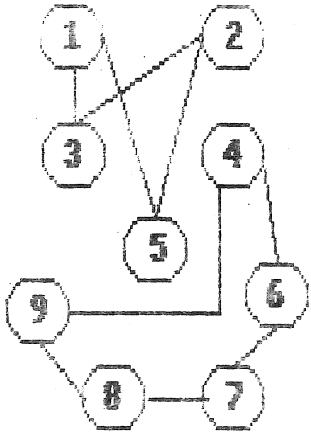
$$N_2(N_{1p}) = N_{1p}(N_2)$$



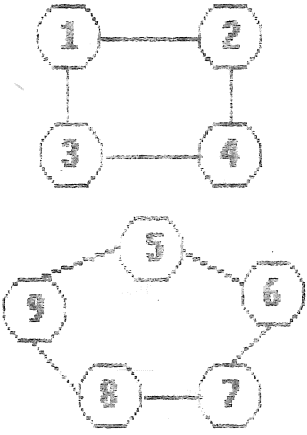
solucion inicial



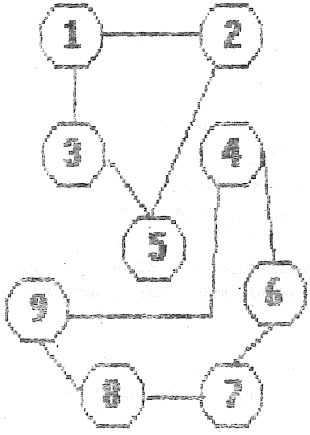
vecino N2



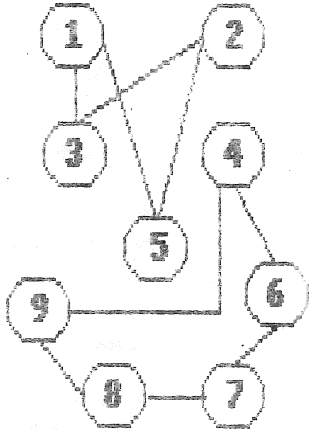
vecino N1p.N2



solucion inicial



vecino N1p



vecino N2.N1p

Demostracion.

$$N_{1D}(N_2(f)) = \text{Union}_{g \text{ en } N_2(f)} N_{1D}(g)$$

Dado r en $N_{1D}(N_2(f))$ existe h en $N_2(f)$ tal que *r* pertenece a $N_{1D}(h)$.
Por el lema anterior, como h pertenece a N2(f), h esta univocamente determinado por los arcos elegidos.
Sean (s_1 , s_2) y (s_3 , s_4) los arcos elegidos. Por el lema anterior, los cambios fueron:

(s_1 , s_2) --> (s_1 , s_3)
(s_3 , s_4) --> (s_2 , s_4)

Si $f(s_1 , s_2) , (s_3 , s_4)) = f(s_1 , s_3) , (s_2 , s_4))$ (en este caso los arcos serian adyacentes) se tiene h=f, luego $N_{1D}(h) = N_{1D}(f)$ por un teorema anterior esta incluido en $N_2(N_{1D}(f))$ luego $N_{1D}(N_2(f))$ esta incluido en $N_2(N_{1D}(f))$.
Es sencillo ver que si r esta en $N_{1D}(h)$, *r* esta univocamente determinado por los vertices v_1, v_2 elegidos para el cambio.
Analisis por casos:

a) $v_1 = v_2$, luego *r* = h, luego r esta en $N_2(f)$ por el teorema anterior esta en $N_2(N_{1D}(f))$

b) $v_1 <> v_2$ ==> v_1 esta en P1 y v_2 esta en P2 con P1<>P2 elementos de la particion inducida por la solucion factible f.
Hay dos posibilidades:
b1) sin perdida de generalidad, $v_1 = s_1$.
b2) $v_j <> s_i$ para j = 1..4; i = 1,2.
Por el lema anterior, toda otra posibilidad es equivaleme (s.p.g.) a alguno de estas dos.

En el caso b2) la aplicacion de las funciones es totalmente conmutativa, es decir, si se llega de f a h eligiendo (s_1,s_2) y (s_3,s_4) y de h a r eligiendo v_1, v_2, se puede llegar de f a h' eligiendo primero v_1 y v_2 y luego de h' a r eligiendo (s_1,s_2) y (s_3,s_4). La verificacion de que ambas transformaciones son validas (llevan de una solucion factible a otra solucion factible) es muy sencilla.

En el caso b1) tenemos que:
$v_1 = s_1$, luego como P1 <> P2, $v_2 <> s_i$; i = 1..4
de f se llega a h por una transformacion asociada a N_2 y de h a r por una asociada a N_{1D}.

f --> h --> r

Esta transformacion, con la misma notacion que antes, es:

N_1 N_{1p}

$(v_1,s_3) \rightarrow (v_1,s_1) \rightarrow (v_2,s_2)$
$(s_3,s_4) \rightarrow (s_2,s_4) \rightarrow (s_2,s_4)$
$(u_1,v_1) \rightarrow (u_1,v_2)$
$(u_2,v_1) \rightarrow (u_2,v_1)$
$(v_2,u_3) \rightarrow (v_1,u_2)$
$P1 \rightarrow P1 - (v_1) + (v_2)$
$P2 \rightarrow P2 - (v_2) + (v_1)$

Donde u_3 es el vertice advacente a v_1 tal que $u_1 <> s_2$ y u_2, u_3 son los vertices adyacentes a v_2.

Definidas las siguientes transformaciones:

$N_{2'}$ N_2

$(v_1,s_2) \rightarrow (v_2,s_2) \rightarrow (v_2,s_3)$
$(s_3,s_4) \rightarrow (s_2,s_4) \rightarrow (s_2,s_4)$
$P1 \rightarrow P1 - (v_1) + (v_2)$
$P2 \rightarrow P2 - (v_2) + (v_1)$
$(u_1,v_1) \rightarrow (u_1,v_2)$
$(u_2,v_2) \rightarrow (u_2,v_1)$
$(v_2,u_3) \rightarrow (v_1,u_2)$

Es sencillo verificar que son validas. Por lo visto mas arriba y el lema anterior, estas transformaciones definen univocamente un vecino que cumple las transformaciones en las vecindades dadas. El vecino hallado es precisamente r.

Luego, se ha probado que $N_{1p}(N_2(f))$ esta incluido en $N_2(N_{1p}(f))$ para toda f solucion factible. Como $\#N_{1p}(N_2(f)) = \#N_2(N_{1p}(f))$ para todo f se deduce que $N_{1p}(N_2) = N_2(N_{1p})$.

Posiblemente este resultado pueda generalizarse para m y R arbitrarios aunque no sera demostrado.

CONJETURA:

$N_{mR}(N_2) = N_2(N_{mp})$ para R, m naturales.

Esto demuestra que al elegir una estrategia combinada no interesa el orden en que se aplican las funciones para encontrar vecindades.

6.4 - METODO DE BUSQUEDA

Pueden aplicarse varios metodos de busqueda. Uno de ellos seria adoptar la primer solucion que se encuentre en la vecindad que sea mejor que la que se tiene. El otro extremo seria buscar en toda la vecindad hasta encontrar la mejor solucion y adoptarla.

Se debe tener en cuenta, tambien, la idea de *REDUCCION*. Un ejemplo de la aplicacion de esta idea en el TSP es: al obtener varios optimos locales, se observa que tienen arcos en comun. Una estrategia es, entonces, fijar esos arcos y seguir buscando pero ahora con menos arcos: se redujo el espacio de busqueda y se trabaja en subconjuntos de las vecindades.

Otra idea, llamada *DENIAL*, consiste en hacer exactamente lo opuesto. Estos arcos que aparecen repetidos se prohiben, ya que se piensa que buscar siempre "por ese lado" puede estar enganando a la estrategia. Se fuerza a respetar la heuristica pero para un conjunto de soluciones alejado al que se estuvo revisando hasta el momento. Esto sirve sobre todo si la solucion obtenida se aleja mucho del optimo.

En el momento de implementar el algoritmo, tambien debe tenerse en cuenta el orden en el que se va a realizar la busqueda. Este orden puede tener o no importancia, dependiendo del problema.

7 - CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta una generalizacion de un problema muy conocido. A traves del GTSP se intenta ejemplificar una metodologia de trabajo para enfrentar y resolver problemas muy complejos, ya sea usando soluciones a problemas similares o tecnicas modernas como local search.

Al haber contado con una formalizacion del concepto de vecindad, se pudieron obtener valiosos resultados teoricos.

Las conclusiones halladas acerca de la complejidad del GTSP sirvieron de impulso para buscar distintas soluciones aproximadas de tiempo polinomico.

Es importante tener en cuenta que el GTSP es una posible generalizacion al problema del viajante, otras generalizaciones podrian aportar distintas ideas a los temas planteados.

En el trabajo se presentaron varios algoritmos. Para poder compararlos y obtener conclusiones mas precisas seria interesante implementarlos y hacer estadisticas sobre ellos.

8 - BIBLIOGRAFIA

[AHU 83] Alfred V. Aho, John E. Hopcroft, Jeffrey D. Ullman, "Data structures and algorithms", editorial Addison-Wesley, 1983

[Bo 58] F. Bock, "An algorithm for solving TS and related network optimization problems", 14 National Meeting de la ORS de America, St Louis, Missouri, 1958

[Cr 58] G. A. Croes, "A method for solving TSP", OR, 6, numero 6, paginas 791-812, 1958

[Eve 79] Shimon Even, "Graph algoritms", Technion Institute, editorial Computer Science Press, 1979

[Fl 59] Merrill M. Flood, "Operations research for management", editores Joseph Mc Closkey y John M. Coppinger, capitulo 19, "The traveling salesman problem", 1959

[Fri 83] A. M. Frieze, "An extension of Christofides heuristic to the K-person travelling salesman problem", University of London, Discrete Applied Mathematics, numero 6, paginas 79-83, 1983

[Ha 78] John P. Hayes, "Computer architecture and organization", University of Southern, California, editorial McGraw-Hill, 1978

[Har 69] Frank Harary, "Graph theory", University of Michigan, editorial Adison-Wesley Publishing Company, 1969

[Hk 62] M. Held, "A dinamic programming approach to sequencing problems", J. SIAM, 10, numero 1, paginas 196-210, 1962

[LePa 78] Harry R. Lewis, Christos H. Papadimitrou, "La eficiencia de los algoritmos", revista Investigacion y Ciencia, numero 18, paginas 78 a 91, 1978

[LePa 81] Harry R. Lewis, Christos H. Papadimitriou, "Elements of the theory of computation", editorial Prentice-Hall, 1981

[Li 65] S. Lin, "Computer solution of the TSP", BSTJ, 44, numero 10, paginas 2245-2269, 1965

[Nil 71] Nils J. Nilsson, "Problem-solving methods in artificial intelligence", editorial McGraw-Hill, 1971

[NiWi 75] Albert Nijenhuis, Herbert S. Wilf, "Combinatorial algorithms", editorial Academic Press, 1975

[Pap 82] Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz, "Combinatorial optimization, algorithms and complexity", editorial Prentice-Hall, 1982

[Pap 84] Christos H. Papadimitriou, "On the complexity of unique solutions", Stanford University and National Technical University of Athens, Journal of the Association for Computing Machinery vol. 31, numero 2, paginas 392 a 400, 1984

[RND 77] Edward M. Reingold, Jurg Nievergelt, Narsingh Deo, "Combinatorial algorithms, theory and practice", editorial Prentice-Hall, 1977